Call-by-Value でのパラメトリシティ

上田 やよい [1], 浅井 健一 [2]

[1] お茶の水女子大学 理学専攻
ueda.yayoi@is.ocha.ac.jp

[2] お茶の水女子大学
asai@is.ocha.ac.jp

1 はじめに

パラメトリシティ[4] とは、プログラムの定義を見ることなく、型のみからそのプログラムが満たす性質を証明するために使われる概念である。これまでは、call-by-name の意味論を用いたパラメトリシティが広く使われてきた。

Call-by-value および call-by-name とは β 簡約の評価戦略である。引数を値まで簡約してから β 簡約を行うのが call-by-value, 引数を簡約することなく β 簡約をおこなうのが call-by-name である。例えば $(\lambda f.f)\ ((\lambda g.g)\ (\lambda x.x))$ のような項があったとき、$(\lambda g.g)\ (\lambda x.x)$ を先に β 簡約するか、$(\lambda g.g)\ (\lambda x.x)$ のまま $\lambda f.f$ との β 簡約を先に行うか、二通りの簡約方法がある。前者の戦略が call-by-value, 後者が call-by-name である。パラメトリシティの証明は一般に call-by-value の方が証明がはるかに難しくなる。既存の研究は call-by-name の評価戦略をとっているものが多い。

しかしながら、実際的なプログラミング言語の多くは call-by-value の評価戦略を採用しているため、call-by-name のパラメトリシティをそのまま適用することはできない。また、再帰関数や手続き命令、継続計算など、プログラムの実行順序によって結果が大きく左右されるような拡張を行う場合、あらかじめ実行順序を明確にしておくことには大きな意義があると考えられる。

本研究では、Polymorphic Lambda Calculus において、CPS の意味論を用いる事で、call-by-value のパラメトリシティを証明する。

本論文の構成は以下の通りである。2 節では Polymorphic Lambda Calculus と Wadler の手法 [6] によるパラメトリシティの証明を紹介する。3 節では Polymorphic Lambda Calculus の call-by-value CPS の意味論を定義した上で、この意味論に沿った形でのパラメトリシティを証明する。本研究の貢献は 3 節である。4 節では 3 節で証明したパラメトリシティを適用した例を紹介する。

関連研究は以下の通りである。[3] では PCF を $\forall$, lazy list, $\exists$ で拡張した体系で、部分関数を含む形で call-by-name の操作的等価性などのさまざまな性質を証明している。[5] では、Haskell などの部分的に strict に評価する言語について、型規則に手を入れて strict な評価をする部分とそうでない部分を明確に分けることで free theorem を導出している。[1] では、型、項、二項関係を持つような体系で自身の意味を自身の体系で記述し、依存型を含むパラメトリシティを導出している。[2] では System F を継続を扱うコントロールオペレータで拡張した体系で、停止性の証明を call-by-value と call-by-name の二つの評価戦略について評価文脈を用いて行っている。

2 Polymophic Lambda Calculus

この節では、先行研究において Polymorphic Lambda Calculus のパラメトリシティをどのように構築しているかを紹介する。表記や用語は基本的に Wadler の論文 [6] に則っている。

2.1節ではPolymorphic Lambda Calculusの型と構文を、2.2節では意味論を紹介する。2.3節ではPolymorphic Lambda Calculusの型に対して二項関係の意味を与え、パラメトリシティを証明する。

2.1 型と構文

この節ではPolymorphic lambda Calculusの型と構文を紹介する。

$$\begin{array}{lrcl} \text{型} & T,U,V & := & X \mid U \to V \mid \forall X.T \\ \text{構文} & t,u,v & := & x \mid \lambda x:U.v \mid t\ u \mid \Lambda X.t \mid t_U \end{array}$$

X は型変数, x は項の変数である。$\overline{X}$ を型変数の列、$\overline{x}$ を変数とその型の組 $(x_i : T_i)$ の列とする。$\overline{X}$, $\overline{x}$ に含まれる変数名は全て異なるものとする。本研究では扱う型を上記の構文を満たすもののうち、以下のものに限定する。

定義 2.1 (Well-Scoped-Type) 型 T に現れる自由変数がすべて $\overline{X}$ に含まれるとき、型 T は $\overline{X}$ のもとでwell-scoped-typeであるといい $\overline{X} \vdash_{ws} T$ と表記する。

以降の議論はすべて $\overline{X} \vdash_{ws} T$ であるような型 T について行う。また $\overline{x}$ に現れる型についても同様の制限を行う。

定義 2.2 (Well-Scoped-Type (2)) すべての $(x_i : T_i) \in \overline{x}$ について、$\overline{X} \vdash_{ws} T_i$ が成り立つとき $\overline{X} \vdash_{ws} \overline{x}$ と表記する。

$\overline{X}, \overline{x}$ のもとで項 t が T 型を持つとき、

$$\overline{X}; \overline{x} \vdash t : T$$

と表記し、これを型判断と呼ぶ。このとき $\vdash$ の右側に表れる項の自由変数はすべて $\overline{x}$ に含まれていなければならない。また $\overline{X} \vdash_{ws} T$ かつ $\overline{X} \vdash_{ws} \overline{x}$ が成り立っていなければならない。

上の型判断を用いてPolymorphic Lambda Calculusの型規則は以下のように定義される。

型規則

$$\frac{}{\overline{X}; \overline{x}, x : T \vdash x : T}\ (\mathtt{Var})$$

$$\frac{\overline{X}; \overline{x}, x : U \vdash v : V}{\overline{X}; \overline{x} \vdash \lambda x : U.v : U \to V}\ (\to \mathtt{I}) \qquad \frac{\overline{X}; \overline{x} \vdash t : U \to V \quad \overline{X}; \overline{x} \vdash u : U}{\overline{X}; \overline{x} \vdash t\ u : V}\ (\to \mathtt{E})$$

$$\frac{\overline{X}, X; \overline{x} \vdash t : T \quad \overline{X} \vdash_{ws} \overline{x}}{\overline{X}; \overline{x} \vdash \Lambda X.t : \forall X.T}\ (\forall \mathtt{I}) \qquad \frac{\overline{X}; \overline{x} \vdash t : \forall X.T \quad \overline{X} \vdash_{ws} U}{\overline{X}; \overline{x} \vdash t_U : T[U/X]}\ (\forall \mathtt{E})$$

$T[U/X]$ は型に対する代入を表す。型および項の代入については通常通り定義する。

型の代入について、以下の性質が成り立つ。

定義 2.3 (型の代入：変数定義) $\overline{x}$ に含まれるすべての $x_i : T_i$ について、T_i に現れる型の自由変数 X を型 U で $x_i : T_i[U/X]$ と置き換えるとき $\overline{x}[U/X]$ と表記する。

補題 2.4 (型の代入補題) $\overline{X}, X; \overline{x} \vdash t : T$ が成り立つとき、$\overline{X} \vdash_{ws} U$ であるような任意の型 U について $\overline{X}; \overline{x}[U/X] \vdash t[U/X] : T[U/X]$ が成り立つ。

証明 $\overline{X}, X; \overline{x} \vdash t : T$ の導出木の大きさに関する帰納法で証明する。

項の代入についても同様の性質が成り立つが、本研究では省略する。

2.2 意味論

この節では Polymorphic Lambda Calculus の意味論を $\overline{X};\overline{x} \vdash t : T$ に対して与える。

まずはじめに、Polymorphic Lambda Calculus の意味を記述するための数学的構造を定義する。本研究では、この数学的構造を frame と呼ぶ。Frame は大きく分けて、型の意味を担う集合と項の意味を担う集合から成る。本研究では、型の意味を担う集合を universe と呼び $\mathbf{U}$ と表記する。また、項の意味を担う集合を単に domain と呼び $\mathbf{D}$ と表記する。関数型と区別するため、集合 universe や domain 上の数学的な関数のなす集合を $[\mathbf{U} \to \mathbf{U}]$ のように [] をつけて表記する。

Universe $\mathbf{U}$ は、$\to, \forall$ に相当する数学的な構造を持ち、以下の条件を満たすものとする。

定義 2.5 (Universe)

- すべての $A, B \in \mathbf{U}$ について、$A \to B \in \mathbf{U}$
- すべての $F \in [\mathbf{U} \to \mathbf{U}]$ について $\forall F \in \mathbf{U}$

Polymorphic Lambda Caculus の型 $\forall X.T$ は $\mathbf{U}$ の値を受け取って $\mathbf{U}$ の値を返す関数 $F \in [\mathbf{U} \to \mathbf{U}]$ で表現する。これを任意の型で instanciate する操作は $A \in \mathbf{U}$ との関数適用 $F(A)$ で表現する。この型に対応する Polymorphic Lambda Calculus の項 $\Lambda X.t$ は、$A \in \mathbf{U}$ を受け取って $F(A)$ 型の値の集合に相当する domain の部分集合 $\mathbf{D}_{F(A)}$ を返す関数で表現する。このような数学的関数の成す集合を $[\forall A : \mathbf{U}.\mathbf{D}_{F(A)}]$ と表記する。[] 中の $\forall$ は「$\mathbf{U}$ の任意の要素」というメタな意味を表している。

$\forall$ の場合に限らず、domain $\mathbf{D}$ は $\mathbf{U}$ の要素 A について、A 型の値の集合に相当する $\mathbf{D}_A$ を持つものとして定義する。また $\mathbf{U}$ の持つ数学的構造 $\to, \forall$ に従って、$\mathbf{D}$ 上でも同様の構造を定義する。

Domain $\mathbf{D}$ は以下の条件を満たすものとする。

定義 2.6 (Domain)

- すべての $A \in \mathbf{U}$ について、$\mathbf{D}$ は A 型の値の集合に対応する部分集合 $\mathbf{D}_A$ をもつ。
- 以下を満たす二つの数学的な関数 ϕ と ψ をもつ。

$$\phi \in [\mathbf{D}_{A\to B} \to [\mathbf{D}_A \to \mathbf{D}_B]] \qquad \psi \in [[\mathbf{D}_A \to \mathbf{D}_B] \to \mathbf{D}_{A\to B}] \qquad \phi \circ \psi = id$$

- 以下を満たす二つの数学的な関数 Φ と Ψ をもつ。

$$\Phi \in [\mathbf{D}_{\forall F} \to [\forall A : \mathbf{U}.\mathbf{D}_{F(A)}]] \qquad \Psi[[\forall A : \mathbf{U}.\mathbf{D}_{F(A)}] \to \mathbf{D}_{\forall F}] \qquad \Phi \circ \Psi = id$$

次に、Polymorphic Lambda Calculus の型の意味を考える。本研究では、型の意味を $\mathbf{U}$ の要素で表す denotational semantics で定義する。

まず型変数 X の意味について考える。型 T に現れる自由変数について、その変数の値（意味）は環境が保持するものとし、これを $\overline{A}$ と表記する。本研究では環境 $\overline{A}$ は型変数 X を受け取って $\mathbf{U}$ の要素を返す関数とする。また、型 T の意味を定義するのに充分な条件を持つ環境 $\overline{A}$ を type environment と呼ぶ。

定義 2.7 (Type Environment) $\overline{A}$ が $\overline{X}$ に含まれるすべての型変数 X にそれぞれ $\mathbf{U}$ の要素を割り当てる関数であるとき、$\overline{A}$ は $\overline{X}$ の type environment であるという。

$\overline{X} \vdash_{ws} T$ が成り立つとき、$\overline{X}$ の type environment $\overline{A}$ のもとでの型 T に対応する値を $[\![T]\!]\overline{A}$ と表記し、以下のように定義する。

定義 2.8 (型の意味論)

$$\begin{aligned}
[\![X]\!]\overline{A} &= \overline{A}(X) \\
[\![U \to V]\!]\overline{A} &= [\![U]\!]\overline{A} \to [\![V]\!]\overline{A} \\
[\![\forall X.T]\!]\overline{A} &= \forall(\lambda A.[\![T]\!]\overline{A}[A/X])
\end{aligned}$$

最後に、項の意味について考える。型と同様に、項 t に現れる自由変数 x の値を、環境 $\overline{a}$ が保持するものとする。本研究では $\overline{a}$ は変数 x を受け取って対応する値を返す関数とする。

ここで、変数 x の意味を well-formed に与えることができる環境 $\overline{a}$ が満たすべき条件について考える。変数 x の意味は、その変数の型 T に対応した値でなければならない。つまり frame 内において、変数 x の値は型の意味 $[\![T]\!]\overline{A}$ に対応した domain 内の集合 $\mathbf{D}_{[\![T]\!]\overline{A}}$ の要素でなければならない。同様に、変数に限らず項の意味を考える際には、その項が持つ型の意味 $[\![T]\!]\overline{A}$ が必要となる。従って、環境 $\overline{a}$ の満たすべき条件は、型の意味論および型の環境 $\overline{A}$ とともに記述される。

ある環境 $\overline{A}, \overline{a}$ が $\overline{X}; \overline{x} \vdash t : T$ を満たす項 t の意味を記述するのに充分な条件をもつとき「$\overline{A}, \overline{a}$ は $\overline{X}, \overline{x}$ を respect している」という。具体的な条件は以下である。

定義 2.9 (Respect (1)) $\overline{X}, \overline{x}$ について、

- $\overline{A}$ は $\overline{X}$ の type environment である
- すべての $x_i : T_i \in \overline{x}$ について、$\overline{a}(x_i) \in \mathbf{D}_{[\![T_i]\!]\overline{A}}$ である

$\overline{X}; \overline{x} \vdash t : T$ が成り立つとき $\overline{X}, \overline{x}$ を respect する環境 $\overline{A}, \overline{a}$ のもとでの項 t の値を $[\![t]\!]\overline{A}\,\overline{a}$ と表記し、以下のように定義する。

定義 2.10 (項の意味論)

$$
\begin{array}{rcl}
[\![x]\!]\overline{A}\,\overline{a} & = & \overline{a}(x) \\
[\![\lambda x : U.v]\!]\overline{A}\,\overline{a} & = & \psi\ (\lambda a.[\![v]\!]\overline{A}\,\overline{a}[a/x]) \\
[\![t\ u]\!]\overline{A}\,\overline{a} & = & \phi\ ([\![t]\!]\overline{A}\,\overline{a})\ ([\![u]\!]\overline{A}\,\overline{a}) \\
[\![\Lambda X.t]\!]\overline{A}\,\overline{a} & = & \Psi\ (\lambda A.[\![t]\!]\overline{A}[A/X]\,\overline{a}) \\
[\![t_U]\!]\overline{A}\,\overline{a} & = & \Phi\ ([\![t]\!]\overline{A}\,\overline{a})\ ([\![U]\!]\overline{A})
\end{array}
$$

Type Soundness およびパラメトリシティを証明するためには、代入が行われても型の意味を適切に定義できる必要がある。これらの性質は定義から自明に成り立つものではないが、その証明手法はいわゆる代入補題として確立されている。本研究でもこれにならって型に対する代入の意味についての補題を証明する。

補題 2.11 (型の代入の意味) $\overline{X}, X \vdash_{ws} T$ かつ $\overline{X} \vdash_{ws} U$ が成り立つとき、$\overline{X}$ の 任意の type environment $\overline{A}$ について $[\![T[U/X]]\!]\overline{A} = [\![T]\!]\overline{A}[[\![U]\!]\overline{A}/X]$ である。

証明 型 T の構造に関する帰納法で証明する。

2.1 節の型規則を満たすすべての $\overline{X}; \overline{x} \vdash t : T$ について、$\overline{X}, \overline{x}$ を respect するような任意の環境 $\overline{A}, \overline{a}$ のもとで $[\![T]\!]\overline{A}$ および $[\![t]\!]\overline{A}\,\overline{a}$ が存在するような frame を environment model という。意味論の中で高階関数を扱うため、ある frame が environment model であるためには、frame 内の関数の集合 $[\mathbf{U} \to \mathbf{U}]$, $[\mathbf{D}_A \to \mathbf{D}_B]$, $[\forall A : \mathbf{U}.\mathbf{D}_{F(A)}]$ が充分に大きい必要がある。

意味論で用いる frame が environment model であれば、次の定理を証明することができる。

定理 2.12 (Type Soundness) $\overline{X}; \overline{x} \vdash t : T$ が成り立つならば、$\overline{X}, \overline{x}$ を respect する任意の環境 $\overline{A}, \overline{a}$ について、$[\![t]\!]\overline{A}\,\overline{a} \in \mathbf{D}_{[\![T]\!]\overline{A}}$ である。

証明 $\overline{X}; \overline{x} \vdash t : T$ の導出木に対する帰納法で証明する。

この定理は、Polymorphic Lambda Calculus の型と項の関係が、environment model 上でも保たれることを保証している。

2.3 パラメトリシティ

この節では Polymorphic Lambda Calculus の型を frame 上の二項関係として解釈することを考える。パラメトリシティにおける二項関係は、適当な述語や関数など、二項関係でありさえすればどんなものでもよい。Frame 上では Polymorphic Lambda Calculus の型 $\forall$, $\to$ に対応する二項関係がどのような構造を持つかのみを記述する。

型の意味を表す frame 上の二項関係を考える。$\mathbf{U}$ の二つの要素 A, A' について、$\mathbf{D}_A$, $\mathbf{D}_{A'}$ の要素の組から成る二項関係 $\mathcal{A}$ を $\mathcal{A} : A \Leftrightarrow A'$ と表記する。Polymorphic Lambda Calculus の型 $\to, \forall$ に対応する二項関係は $\mathbf{D}$ の性質を用いて以下のように定義する。

定義 2.13 ($\to$ の二項関係) $\mathcal{A} : A \Leftrightarrow A'$, $\mathcal{B} : B \Leftrightarrow B'$ であるとき、

$$\mathcal{A} \to \mathcal{B} \stackrel{def}{=} \{(f, f') \mid \text{すべての } (a, a') \in \mathcal{A} \text{ について } (\phi\ f\ a, \phi\ f'\ a') \in \mathcal{B}\}$$

ただし $f \in \mathbf{D}_{A \to B}$, $f' \in \mathbf{D}_{A' \to B'}$, $a \in \mathbf{D}_A$, $a' \in \mathbf{D}_{A'}$, $(\phi\ f\ a) \in \mathbf{D}_B$, $(\phi\ f'\ a') \in \mathbf{D}_{B'}$ である。

定義 2.14 ($\forall$ の二項関係) F, $F' \in [\mathbf{U} \to \mathbf{U}]$ と二項関係を受け取って二項関係を返す関数 $\mathcal{F}$ が任意の二項関係 $\mathcal{A} : A \Leftrightarrow A'$ について $\mathcal{F}(\mathcal{A}) : F(A) \Leftrightarrow F'(A')$ を満たすとき、

$$\forall \mathcal{F} \stackrel{def}{=} \{(g, g') \mid \text{すべての } \mathcal{A} : A \Leftrightarrow A' \text{ について } (\Phi\ g\ A, \Phi\ g'\ A') \in \mathcal{F}(\mathcal{A})\}$$

ただし $g \in \mathbf{D}_{\forall F}$, $g' \in \mathbf{D}_{\forall F'}$, $(\Phi\ g\ A) \in \mathbf{D}_{F(A)}$, $(\Phi\ g'\ A') \in \mathbf{D}_{F'(A')}$ である。

Polymorphic Lambda Calculus の型の意味をこの二項関係で表すことを考える。2.2 節と同様に、型 T に現れる自由変数の値（二項関係）を環境が保持するものとし、これを $\overline{\mathcal{A}}$ と表記する。本研究では環境 $\overline{\mathcal{A}}$ は型変数 X を受け取って frame 上の二項関係を返す関数とする。また、型 T の意味を定義するのに充分な条件を持つ環境 $\overline{\mathcal{A}}$ を relation environment と呼ぶ。

定義 2.15 (Relation Environment) $\overline{\mathcal{A}}$ が $\overline{X}$ に含まれる全ての型変数 X にそれぞれ frame 上の二項関係を割り当てる関数であるとき、$\overline{\mathcal{A}}$ は $\overline{X}$ の relation environment であるという。

$\overline{X} \vdash_{ws} T$ が成り立つとき、$\overline{X}$ の relation environment $\overline{\mathcal{A}}$ のもとでの型 T に対応する frame 上の二項関係を $[\![T]\!]\overline{\mathcal{A}}$ と表記し、以下のように定義する。

定義 2.16 (二項関係による型の意味論)

$$\begin{array}{rcl}
[\![X]\!]\overline{\mathcal{A}} & = & \overline{\mathcal{A}}(X) \\
[\![U \to V]\!]\overline{\mathcal{A}} & = & [\![U]\!]\overline{\mathcal{A}} \to [\![V]\!]\overline{\mathcal{A}} \\
[\![\forall X.T]\!]\overline{\mathcal{A}} & = & \forall(\lambda\mathcal{A}.[\![T]\!]\overline{\mathcal{A}}[\mathcal{A}/X])
\end{array}$$

ここから、パラメトリシティを証明するために frame 上の二項関係と二つの型の意味論が満たす性質をいくつか列挙する。

定義 2.17 (Type Environment 上の二項関係) $\overline{\mathcal{A}}$ を $\overline{X}$ の relation environment、$\overline{A}$, $\overline{A}'$ を $\overline{X}$ の type environment とする。$\overline{X}$ に含まれるすべての型変数 X について $\overline{\mathcal{A}}(X) : \overline{A}(X) \Leftrightarrow \overline{A}'(X)$ であるとき、$\overline{\mathcal{A}} : \overline{A} \Leftrightarrow \overline{A}'$ と表記する。

補題 2.18 (型に対応する二項関係) $\overline{X} \vdash_{ws} U$ が成り立つとき、$\overline{\mathcal{A}} : \overline{A} \Leftrightarrow \overline{A}'$ であるような $\overline{X}$ の任意の relation environment $\overline{\mathcal{A}}$ と type environment $\overline{A}$, $\overline{A}'$ について $[\![U]\!]\overline{\mathcal{A}} : [\![U]\!]\overline{A} \Leftrightarrow [\![U]\!]\overline{A}'$ である。

証明 型 U の構造に関する帰納法で証明する。

補題 2.19 (二項関係による型の代入の意味) $\overline{X}, X \vdash_{ws} T$ かつ $\overline{X} \vdash_{ws} U$ が成り立つとき、$\overline{\mathcal{A}} : \overline{A} \Leftrightarrow \overline{A}'$ であるような $\overline{X}$ の任意の relation environment $\overline{\mathcal{A}}$ と type environment $\overline{A}, \overline{A}'$ について以下が成り立つ。

$$[\![T[U/X]]\!]\overline{\mathcal{A}} : [\![T[U/X]]\!]\overline{A} \Leftrightarrow [\![T[U/X]]\!]\overline{A}' = [\![T]\!]\overline{\mathcal{A}}[[\![U]\!]\overline{\mathcal{A}}/X] : [\![T]\!]\overline{A}[[\![U]\!]\overline{A}/X] \Leftrightarrow [\![T]\!]\overline{A}'[[\![U]\!]\overline{A}'/X]$$

証明 型 T の構造に関する帰納法で証明する。

パラメトリシティを満たすのに十分な条件を持つ環境は以下のように定義される。

定義 2.20 (Respect (2)) $\overline{X}, \overline{x}$ について、環境 $\overline{\mathcal{A}}, \overline{A}, \overline{A}', \overline{a}, \overline{a}'$ が以下のすべての条件を満たすならば「$\overline{\mathcal{A}}, \overline{A}, \overline{A}', \overline{a}, \overline{a}'$ は $\overline{X}, \overline{x}$ を respect する」という。

- $\overline{\mathcal{A}}$ は $\overline{X}$ の relation environment である
- $\overline{A}, \overline{a}$ が $\overline{X}, \overline{x}$ を respect する
- $\overline{A}', \overline{a}'$ が $\overline{X}, \overline{x}$ を respect する
- $\overline{\mathcal{A}} : \overline{A} \Leftrightarrow \overline{A}'$ である
- すべての $x_i : T_i \in \overline{x}$ について $(\overline{a}(x_i), \overline{a}'(x_i)) \in [\![T_i]\!]\overline{\mathcal{A}}$ である

以上の性質を用いて、次のパラメトリシティを証明することができる。この定理により、項 t が型 T を持つとき、t 自身が型 T の表す二項関係に入ることが示される。

定理 2.21 (パラメトリシティ) $\overline{X}; \overline{x} \vdash t : T$ が成り立つとき、$\overline{X}, \overline{x}$ を respect するような任意の $\overline{\mathcal{A}}, \overline{A}, \overline{A}', \overline{a}, \overline{a}'$ について $([\![t]\!]\overline{A}\,\overline{a}, [\![t]\!]\overline{A}'\,\overline{a}') \in [\![T]\!]\overline{\mathcal{A}}$ が成り立つ。

証明 $\overline{X}; \overline{x} \vdash t : T$ の導出木の大きさに関する帰納法で証明する。

3 Call-by-Value CPS のパラメトリシティ

この節では 2 節で紹介した Wadler の手法に則って、call-by-value の意味論でのパラメトリシティを証明する。Call-by-value の評価戦略を表現するため、本研究では CPS (Continuation Passing Style) の意味論を用いる。CPS の意味論では、おおざっぱに言うと、Polymorphic Lambda Calculus での型 T が $(T \to \alpha) \to \alpha$ と解釈され、項の意味もそれに伴って変化する。この α はアンサータイプと呼ばれ、プログラム全体の最終結果の型を表す。Polymorphic Lambda Calculus の型および型判断にはアンサータイプは現れないので、アンサータイプには frame 側で任意の値を割り当てる。つまり、意味論全体がアンサータイプでパラメタライズされた形になる。意味を記述する数学的構造 frame は 2.2 節と全く同じであるが、CPS の構造を表すために $\mathbf{U}$ の $\to$ の構造とアンサータイプを用いたマクロを定義する。

3.1 節では Polymorphic Lambda Calculus に対して call-by-value CPS の意味論を与える。3.2 節では Polymorphic Lambda Calculus の型に対して $\mathbf{U}$ 上の call-by-value CPS の二項関係による意味論を与え、パラメトリシティを証明する。

3.1 Call-by-Value CPS の意味論

この節では Polymorphic Lambda Calculus の call-by-value CPS の意味を $\mathbf{U}$ 上の任意の要素 α をアンサータイプとして表す。意味論を記述するための frame の定義は 2.2 節のものをそのまま用いる。この節では CPS の構造を表す domain 上の関数として以下を用いるが、これらは 2.2 節の frame のマクロであり、frame そのものの性質を変えるものではない。

以下 A, B, α は $\mathbf{U}$ の要素、α はアンサータイプである。

$$
\begin{array}{rcl}
\psi^\alpha & \in & [[\mathbf{D}_{A\to\alpha} \to \mathbf{D}_\alpha] \to \mathbf{D}_{(A\to\alpha)\to\alpha}] \\
\psi^\alpha & = & \psi \\
\phi^\alpha & \in & [\mathbf{D}_{(A\to\alpha)\to\alpha} \to [\mathbf{D}_{A\to\alpha} \to \mathbf{D}_\alpha]] \\
\phi^\alpha & = & \phi \\
\psi^f & \in & [[\mathbf{D}_A \to \mathbf{D}_{B\to\alpha} \to \mathbf{D}_\alpha] \to \mathbf{D}_{A\to(B\to\alpha)\to\alpha}] \\
\psi^f & = & \lambda f.\psi\ (\lambda a.\psi\ (\lambda k.f\ a\ k)) \\
\phi^f & \in & [\mathbf{D}_{A\to(B\to\alpha)\to\alpha} \to [\mathbf{D}_A \to \mathbf{D}_{B\to\alpha} \to \mathbf{D}_\alpha]] \\
\phi^f & = & \lambda v.\lambda a.\lambda k.\phi\ (\phi\ v\ a)\ k
\end{array}
$$

$\phi^f \circ \psi^f$ は η 拡張になるが、これは $\mathbf{D}$ 上の数学的関数であるから、恒等関数と等価である。

$\overline{X} \vdash_{ws} T$ が成り立つとき、アンサータイプ α および $\overline{X}$ の type environment $\overline{A}$ のもとでの型 T に対応する call-by-value CPS の値を $[\![T]\!]\overline{A}$ と表記し、以下のように定義する。Type environment の定義は 2.7 と同様であるが、意味論はこの節のものを用いる。

定義 3.1 (型の call-by-value CPS の意味論)

$$
\begin{array}{rcl}
[\![X]\!]\overline{A} & = & \overline{A}(X) \\
[\![U \to V]\!]\overline{A} & = & [\![U]\!]\overline{A} \to ([\![V]\!]\overline{A} \to \alpha) \to \alpha \\
[\![\forall X.T]\!]\overline{A} & = & \forall(\lambda A.([\![T]\!]\overline{A}[A/X] \to \alpha) \to \alpha)
\end{array}
$$

$\overline{X}; \overline{x} \vdash t : T$ が成り立つとき、アンサータイプ α および $\overline{X}, \overline{x}$ を respect する環境 $\overline{A}, \overline{a}$ のもとでの項 t の call-by-value CPS の値を $[\![t]\!]\overline{A}\,\overline{a}$ と表記し、以下のように定義する。Respect の定義は 2.9 と同様であるが、意味論はこの節のものを用いる。

定義 3.2 (項の call-by-value CPS の意味論)

$$
\begin{array}{rcl}
[\![x]\!]\overline{A}\,\overline{a} & = & \psi^\alpha\ (\lambda k.\phi\ k\ \overline{a}(x)) \\
[\![\lambda x:U.v]\!]\overline{A}\,\overline{a} & = & \psi^\alpha\ (\lambda k.\phi\ k\ (\psi^f\ (\lambda a.\lambda k'.\phi^\alpha\ ([\![v]\!]\overline{A}\,\overline{a}[a/x])\ k'))) \\
[\![t\ u]\!]\overline{A}\,\overline{a} & = & \psi^\alpha\ (\lambda k.\phi^\alpha\ ([\![t]\!]\overline{A}\,\overline{a})\ (\psi\ (\lambda f.(\phi^\alpha\ ([\![u]\!]\overline{A}\,\overline{a})\ (\psi\ (\lambda v.\phi^f\ f\ v\ k)))))) \\
[\![\Lambda X.t]\!]\overline{A}\,\overline{a} & = & \psi^\alpha\ (\lambda k.\phi\ k\ (\Psi\ (\lambda A.[\![t]\!]\overline{A}[A/X]\,\overline{a}))) \\
[\![t_U]\!]\overline{A}\,\overline{a} & = & \psi^\alpha\ (\lambda k.\phi^\alpha\ ([\![t]\!]\overline{A}\,\overline{a})\ (\psi\ (\lambda g.\phi^\alpha\ (\Phi\ g\ ([\![U]\!]\overline{A}))\ k)))
\end{array}
$$

上で定義した call-by-value CPS の意味論で、型とその代入について 2.2 節と同様の性質が成り立つ。

補題 3.3 (型の代入の CPS の意味) $\overline{X}, X \vdash_{ws} T$ かつ $\overline{X} \vdash_{ws} U$ が成り立つとき、$\overline{X}$ の 任意の type environment $\overline{A}$ について call-by-value CPS の型の意味論で $[\![T[U/X]]\!]\overline{A} = [\![T]\!]\overline{A}[[\![U]\!]\overline{A}/X]$ である。

証明 型 T の構造に関する帰納法で証明する。

2.2 節と同様に、call-by-value CPS 意味論で用いる frame が environment model であれば、次の定理を証明することができる。

定理 3.4 (Type Soundness : CPS) $\overline{X};\overline{x} \vdash t : T$ が成り立つとき、アンサータイプ α のもとで、$\overline{X}, \overline{x}$ を respect する任意の環境 $\overline{A}, \overline{a}$ について call-by-value CPS の意味論で $[\![t]\!]\overline{A}\,\overline{a} \in \mathbf{D}_{([\![T]\!]\overline{A} \to \alpha) \to \alpha}$ である。

証明 $\overline{X};\overline{x} \vdash t : T$ の大きさに関する帰納法で証明する。

この定理は Polymorphic Lambda Calculus の型と項の関係を environment model 上の call-by-value CPS の型と値の関係に対応づけている。

3.2 パラメトリシティ

2.3 節と同様に、まず二項関係による call-by-value CPS の型の意味を考える。以降 α は、frame 上の任意の二項関係 $\alpha : \beta \Leftrightarrow \beta'$ とする。二項関係の定義は 2.3 節と同じであるが、CPS の構造を表すために以下の二つの二項関係を定義する。これらは 2.3 節の二項関係のマクロであり、frame 上に新たな構造を持つ二項関係を加えるものではない。

定義 3.5 (CPS の二項関係) $\mathcal{T} : T \Leftrightarrow T'$, $\alpha : \beta \Leftrightarrow \beta'$ であるとき、$(\mathcal{T} \to \alpha) \to \alpha$ を以下のように定義する。

$$(\mathcal{T} \to \alpha) \to \alpha \stackrel{def}{=} \{(t, t') \mid \text{すべての } (k, k') \in \mathcal{T} \to \alpha \text{ について } (\phi^\alpha\ t\ k, \phi^\alpha\ t'\ k') \in \alpha\}$$

ただし $t \in \mathbf{D}_{(T \to \beta) \to \beta}$, $t' \in \mathbf{D}_{(T' \to \beta') \to \beta'}$, $k \in \mathbf{D}_{T \to \beta}$, $k' \in \mathbf{D}_{T' \to \beta'}$, $(\phi^\alpha\ t\ k) \in \mathbf{D}_\beta$, $(\phi^\alpha\ t'\ k') \in \mathbf{D}_{\beta'}$ である。

定義 3.6 (CPS 関数の二項関係) $\mathcal{A} : A \Leftrightarrow A'$, $\mathcal{B} : B \Leftrightarrow B'$, $\alpha : \beta \Leftrightarrow \beta'$ であるとき、$\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \alpha) \to \alpha$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \alpha) \to \alpha \stackrel{def}{=} \{(f, f') \mid & \text{すべての } (a, a') \in \mathcal{A}, (k, k') \in \mathcal{B} \to \alpha \text{ について} \\ & (\phi^f\ f\ a\ k, \phi^f\ f\ a\ k) \in \alpha\}\end{aligned}$$

ただし $f \in \mathbf{D}_{A \to (B \to \beta) \to \beta}$, $f' \in \mathbf{D}_{A' \to (B' \to \beta') \to \beta'}$, $a \in \mathbf{D}_A$, $a' \in \mathbf{D}_{A'}$, $k \in \mathbf{D}_{B \to \beta}$, $k' \in \mathbf{D}_{B' \to \beta'}$, $(\phi^f\ f\ a\ k) \in \mathbf{D}_\beta$, $(\phi^f\ f'\ a'\ k') \in \mathbf{D}_{\beta'}$ である。

$\overline{X} \vdash_{ws} T$ が成り立つとき、$\alpha : \beta \Leftrightarrow \beta'$ と $\overline{X}$ の relation environment $\overline{\mathcal{A}}$ のもとでの型 T に対応する frame 上の二項関係を $[\![T]\!]\overline{\mathcal{A}}$ と表記し、以下のように定義する。Relation environment の定義は 2.15 と同様であるが、意味論はこの節のものを用いる。

定義 3.7 (二項関係による型の call-by-value CPS の意味)

$$\begin{aligned}[\![X]\!]\overline{\mathcal{A}} &= \overline{\mathcal{A}}(X) \\ [\![A \to B]\!]\overline{\mathcal{A}} &= [\![A]\!]\overline{\mathcal{A}} \to ([\![B]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha) \to \alpha \\ [\![\forall X.T]\!]\overline{\mathcal{A}} &= \forall(\lambda\mathcal{A}.([\![T]\!]\overline{\mathcal{A}}[\mathcal{A}/X] \to \alpha) \to \alpha)\end{aligned}$$

2.3 節と同様に、call-by-value CPS のパラメトリシティを証明するために frame 上の二項関係と二つの call-by-value CPS の型の意味論が満たす性質を示す。

補題 3.8 (型に対応する CPS の二項関係) $\overline{X} \vdash_{ws} U$ が成り立つとき、$\overline{\mathcal{A}} : \overline{A} \Leftrightarrow \overline{A}'$ であるような $\overline{X}$ の任意の relation environment $\overline{\mathcal{A}}$ と type environment $\overline{A}$, $\overline{A}'$ について call-by-value CPS の意味論で $[\![U]\!]\overline{\mathcal{A}} : [\![U]\!]\overline{A} \Leftrightarrow [\![U]\!]\overline{A}'$ である。

証明 型 U の構造に関する帰納法で証明する。

補題 3.9 (二項関係による型の代入の CPS の意味) $\overline{X}, X \vdash_{ws} T$ かつ $\overline{X} \vdash_{ws} U$ が成り立つとき、$\overline{\mathcal{A}} : \overline{A} \Leftrightarrow \overline{A}'$ であるような $\overline{X}$ の任意の relation environment $\overline{\mathcal{A}}$ と type environment $\overline{A}, \overline{A}'$ についてcall-by-value CPS の型の意味論と二項関係による call-by-value CPS の型の意味論で以下が成り立つ。

$$[\![T[U/X]]\!]\overline{\mathcal{A}} : [\![T[U/X]]\!]\overline{A} \Leftrightarrow [\![T[U/X]]\!]\overline{A}' = [\![T]\!]\overline{\mathcal{A}}[[\![U]\!]\overline{\mathcal{A}}/X] : [\![T]\!]\overline{A}[[\![U]\!]\overline{A}/X] \Leftrightarrow [\![T]\!]\overline{A}'[[\![U]\!]\overline{A}'/X]$$

証明 型 T の構造に関する帰納法で証明する。

以上の性質を用いて、call-by-value CPS のパラメトリシティが証明される。

定理 3.10 (Call-by-Value CPS のパラメトリシティ) $\overline{X}; \overline{x} \vdash t : T$ が成り立つとき、$\overline{X}$, $\overline{x}$ を respect する任意の環境 $\overline{\mathcal{A}}$, $\overline{A}$, $\overline{A}'$, $\overline{a}$, $\overline{a}'$ について call-by-value CPS の意味論で $([\![t]\!]\overline{A}\,\overline{a}, [\![t]\!]\overline{A}'\,\overline{a}') \in \mathbf{D}_{([\![T]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha) \to \alpha}$ が成り立つ。

証明 $\overline{X}; \overline{x} \vdash t : T$ の大きさに関する帰納法で証明する。

1. $\overline{X}; \overline{x}, x : T \vdash x : T$ のとき、

$$\begin{array}{rcll} [\![x]\!]\overline{A}\,\overline{a} & = & \psi^\alpha\ (\lambda k.\phi\ k\ \overline{a}(x)) & (1) \\ [\![x]\!]\overline{A}'\,\overline{a}' & = & \psi^\alpha\ (\lambda k.\phi\ k\ \overline{a}'(x)) & (2) \end{array}$$

これらが二項関係 $([\![T]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha) \to \alpha$ に入ることを示す。

$f = (1)$, $f' = (2)$ とおく。CPS の二項関係の定義より、任意の $(y, y') \in [\![T]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha$ (3) について $(\phi^\alpha\ f\ y, \phi^\alpha\ f'\ y') \in \alpha$ であることを示せばよい。

$$\begin{array}{rcll} \phi^\alpha\ f\ y & = & \phi^\alpha\ (\psi^\alpha\ (\lambda k.\phi\ k\ \overline{a}(x)))\ y & \\ & & (\lambda k.\phi\ k\ \overline{a}(x))\ y & \\ & & \phi\ y\ \overline{a}(x) & (4) \\ \phi^\alpha\ f'\ y' & = & \phi\ y'\ \overline{a}'(x) & (5) \end{array}$$

定理の仮定より、環境 $\overline{\mathcal{A}}$, $\overline{A}$, $\overline{A}'$, $\overline{a}$, $\overline{a}'$ が $\overline{X}$, $(\overline{x}, x : T)$ を respect するから

$$(\overline{a}(x), \overline{a}'(x)) \in [\![T]\!]\overline{\mathcal{A}} \qquad (6)$$

(3) の二項関係 $\to$ の定義と (6) から

$$(\phi\ y\ \overline{a}(x), \phi\ y'\ \overline{a}'(x)) \in \alpha$$

これと (4) (5) より $(\phi^\alpha\ f\ y, \phi^\alpha\ f'\ y') \in \alpha$ である。

よって CPS の二項関係の定義を満たすので $([\![x]\!]\overline{A}\,\overline{a}, [\![x]\!]\overline{A}'\,\overline{a}') \in ([\![T]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha) \to \alpha$ であるから定理は成り立つ。

2. $\overline{X}; \overline{x} \vdash \lambda x : U.v : U \to V$ のとき、

$$\begin{array}{rcll} [\![\lambda x : U.v]\!]\overline{A}\,\overline{a} & = & \psi^\alpha\ (\lambda k.\phi\ k\ (\psi^f\ (\lambda a.\lambda k'.\phi^\alpha\ ([\![v]\!]\overline{A}\,\overline{a}[a/x])\ k'))) & (7) \\ [\![\lambda x : U.v]\!]\overline{A}'\,\overline{a}' & = & \psi^\alpha\ (\lambda k.\phi\ k\ (\psi^f\ (\lambda a.\lambda k'.\phi^\alpha\ ([\![v]\!]\overline{A}'\,\overline{a}'[a/x])\ k'))) & (8) \\ [\![U \to V]\!]\overline{\mathcal{A}} & = & [\![U]\!]\overline{\mathcal{A}} \to ([\![V]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha) \to \alpha & (9) \end{array}$$

(7) (8) が二項関係 $(([\![U]\!]\overline{\mathcal{A}} \to ([\![V]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha) \to \alpha) \to \alpha) \to \alpha$ に入ることを示す。

$f = (7)$, $f' = (8)$ とおく。CPS の二項関係の定義より、任意の

$$(y, y') \in ([\![U]\!]\overline{\mathcal{A}} \to ([\![V]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha) \to \alpha) \to \alpha \qquad (10)$$

について $(\phi^\alpha\ f\ y, \phi^\alpha\ f'\ y') \in \alpha$ であることを示せばよい。

$$\begin{array}{rcll} \phi^\alpha\ f\ y & = & \phi^\alpha\ (\psi^\alpha\ (\lambda k.\phi\ k\ (\psi^f\ (\lambda a.\lambda k'.\phi^\alpha\ ([\![v]\!]\overline{A}\,\overline{a}[a/x])\ k'))))\ y & \\ & = & (\lambda k.\phi\ k\ (\psi^f\ (\lambda a.\lambda k'.\phi^\alpha\ ([\![v]\!]\overline{A}\,\overline{a}[a/x])\ k')))\ y & \\ & = & \phi\ y\ (\psi^f\ (\lambda a.\lambda k'.\phi^\alpha\ ([\![v]\!]\overline{A}\,\overline{a}[a/x])\ k')) & (11) \\ \phi^\alpha\ f'\ y' & = & \phi\ y'\ (\psi^f\ (\lambda a.\lambda k'.\phi^\alpha\ ([\![v]\!]\overline{A}'\,\overline{a}'[a/x])\ k')) & (12) \end{array}$$

ここで (10) の二項関係の定義を使うために、(11) (12) の右辺の第二引数をそれぞれ g, g' とおいて $(g, g') \in [\![U]\!]\overline{\mathcal{A}} \to ([\![V]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha) \to \alpha$ を示す。

CPS 関数の二項関係の定義より、任意の $(u, u') \in [\![U]\!]\overline{\mathcal{A}}$ (13), $(z, z') \in [\![V]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha$ (14) について $(\phi^f\ g\ u\ z, \phi^f\ g'\ u'\ z') \in \alpha$ を示せばよい。

$$\begin{aligned} \phi^f\ g\ u\ z &= \phi^f\ \psi^f\ (\lambda a.\lambda k'.\phi^\alpha\ ([\![v]\!]\overline{A}\,\overline{a}[a/x])\ k')\ u\ z \\ &= (\lambda a.\lambda k'.\phi^\alpha\ ([\![v]\!]\overline{A}\,\overline{a}[a/x])\ k')\ u\ z \\ &= \phi^\alpha\ ([\![v]\!]\overline{A}\,\overline{a}[u/x])\ z \qquad (15) \\ \phi^f\ g'\ u'\ z' &= \phi^\alpha\ ([\![v]\!]\overline{A}'\,\overline{a}'[u'/x])\ z' \qquad (16) \end{aligned}$$

型規則より

$$\frac{\overline{X}; \overline{x}, x : U \vdash v : V}{\overline{X}; \overline{x} \vdash \lambda x : U.v : U \to V}\ (\to \mathtt{I})$$

であるから、帰納法の仮定より $\overline{X}$, $(\overline{x}, x : U)$ を respect するすべての環境で $v : V$ に対して定理が成り立つ。これを適用するため、環境 $\overline{\mathcal{A}}$, $\overline{A}$, $\overline{A}'$, $\overline{a}[u/x]$, $\overline{a}'[u'/x]$ が $\overline{X}$, $(\overline{x}, x : U)$ を respect するか調べる。

定理の仮定より、環境 $\overline{\mathcal{A}}$, $\overline{A}$, $\overline{A}'$, $\overline{a}$, $\overline{a}'$ が $\overline{X}$, $\overline{x}$ を respect するから以下が成り立つ。

- $\overline{\mathcal{A}}$ は $\overline{X}$ の relation environment である。
- $\overline{A}$, $\overline{a}$ が $\overline{X}$, $\overline{x}$ を respect する。すなわち $\overline{A}$, $\overline{a}[u/x]$ が $\overline{X}$, $\overline{x}$ を respect する。
- $\overline{A}'$, $\overline{a}'$ が $\overline{X}$, $\overline{x}$ を respect する。すなわち $\overline{A}'$, $\overline{a}'[u'/x]$ が $\overline{X}$, $\overline{x}$ を respect する。
- $\overline{\mathcal{A}} : \overline{A} \Leftrightarrow \overline{A}'$ である。
- すべての $x_i : T_i \in \overline{x}$ について $(\overline{a}(x_i), \overline{a}'(x_i)) \in [\![T_i]\!]\overline{\mathcal{A}}$ である。
  すなわち $(\overline{a}[u/x](x_i), \overline{a}'[u'/x](x_i)) \in [\![T_i]\!]\overline{\mathcal{A}}$ である。

$x : U \in (\overline{x}, x : U)$ について、

$$\overline{a}[u/x](x) = u, \qquad \overline{a}'[u'/x](x) = u'$$

これと (13) より

$$(\overline{a}[u/x](x), \overline{a}'[u'/x](x)) \in [\![U]\!]\overline{\mathcal{A}}$$

さらに補題 3.8 より、$[\![U]\!]\overline{\mathcal{A}} : [\![U]\!]\overline{A} \Leftrightarrow [\![U]\!]\overline{A}'$ であるから

$$\overline{a}[u/x](x) \in [\![U]\!]\overline{A}, \qquad \overline{a}'[u'/x](x) \in [\![U]\!]\overline{A}'$$

であるので $\overline{A}$, $\overline{a}$ と $\overline{A}'$, $\overline{a}'$ はどちらも $\overline{X}$, $(\overline{x}, x : U)$ を respect する。

よって、環境 $\overline{\mathcal{A}}$, $\overline{A}$, $\overline{A}'$, $\overline{a}[u/x]$, $\overline{a}'[u'/x]$ は $\overline{X}$, $(\overline{x}, x : U)$ を respect する。帰納法の仮定より

$$([\![v]\!]\overline{A}\,\overline{a}[u/x], [\![v]\!]\overline{A}'\,\overline{a}'[u'/x]) \in ([\![V]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha) \to \alpha$$

この CPS の二項関係の定義と (14) から

$$(\phi^\alpha\ ([\![v]\!]\overline{A}\,\overline{a}[u/x])\ z, \phi^\alpha\ ([\![v]\!]\overline{A}'\,\overline{a}'[u'/x])\ z') \in \alpha$$

これと (15)(16) より

$$(\phi^f\ g\ u\ z, \phi^f\ g'\ u'\ z') \in \alpha$$

よって CPS 関数の二項関係の定義を満たすので $(g, g') \in [\![U]\!]\overline{\mathcal{A}} \to ([\![V]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha) \to \alpha$ である。これと (10) の二項関係 $\to$ の定義より

$$(\phi\ y\ g, \phi\ y'\ g') \in \alpha$$

これと (11) (12) より

$$(\phi^\alpha\ f\ y, \phi^\alpha\ f'\ y') \in \alpha$$

よって CPS の二項関係の定義を満たすので

$$([\![\lambda x : U.v]\!]\overline{A}\,\overline{a}, [\![\lambda x : U.v]\!]\overline{A}'\,\overline{a}') \in (([\![U]\!]\overline{\mathcal{A}} \to ([\![V]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha) \to \alpha) \to \alpha) \to \alpha$$

であるから定理は成り立つ。

3. $\overline{X};\overline{x} \vdash t\ u : V$ のとき、

$$\begin{aligned} [\![t\ u]\!]\overline{A}\,\overline{a} &= \psi^\alpha\ (\lambda k.\phi^\alpha\ ([\![t]\!]\overline{A}\,\overline{a})\ (\psi\ (\lambda f.(\phi^\alpha\ ([\![u]\!]\overline{A}\,\overline{a})\ (\psi\ (\lambda v.\phi^f\ f\ v\ k)))))) & (17) \\ [\![t\ u]\!]\overline{A}'\,\overline{a}' &= \psi^\alpha\ (\lambda k.\phi^\alpha\ ([\![t]\!]\overline{A}'\,\overline{a}')\ (\psi\ (\lambda f.(\phi^\alpha\ ([\![u]\!]\overline{A}'\,\overline{a}')\ (\psi\ (\lambda v.\phi^f\ f\ v\ k)))))) & (18) \end{aligned}$$

これらが二項関係 $([\![V]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha) \to \alpha$ に入っていることを示す。

$f = (17)$ $f = (18)$ とおく。CPS の二項関係の定義より、任意の $(y, y') \in [\![V]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha$ (19) について $(\phi^\alpha\ f\ y, \phi^\alpha\ f'\ y') \in \alpha$ であることを示せばよい。

$$\begin{aligned} \phi^\alpha\ f\ y &= \phi^\alpha\ (\psi^\alpha\ (\lambda k.\phi^\alpha\ ([\![t]\!]\overline{A}\,\overline{a})\ (\psi\ (\lambda f.(\phi^\alpha\ ([\![u]\!]\overline{A}\,\overline{a})\ (\psi\ (\lambda v.\phi^f\ f\ v\ k)))))))\ y \\ &\quad (\lambda k.\phi^\alpha\ ([\![t]\!]\overline{A}\,\overline{a})\ (\psi\ (\lambda f.(\phi^\alpha\ ([\![u]\!]\overline{A}\,\overline{a})\ (\psi\ (\lambda v.\phi^f\ f\ v\ k))))))\ y \\ &\quad \phi^\alpha\ ([\![t]\!]\overline{A}\,\overline{a})\ (\psi\ (\lambda f.(\phi^\alpha\ ([\![u]\!]\overline{A}\,\overline{a})\ (\psi\ (\lambda v.\phi^f\ f\ v\ y))))) & (20) \\ \phi^\alpha\ f'\ y' &= \phi^\alpha\ ([\![t]\!]\overline{A}'\,\overline{a}')\ (\psi\ (\lambda f.(\phi^\alpha\ ([\![u]\!]\overline{A}'\,\overline{a}')\ (\psi\ (\lambda v.\phi^f\ f\ v\ y'))))) & (21) \end{aligned}$$

型規則より

$$\frac{\overline{X};\overline{x} \vdash t : U \to V \quad \overline{X};\overline{x} \vdash u : U}{\overline{X};\overline{x} \vdash t\ u : V}\ (\to \mathtt{E})$$

であるから、帰納法の仮定より

$$\begin{aligned} ([\![t]\!]\overline{A}\,\overline{a}, [\![t]\!]\overline{A}'\,\overline{a}') &\in ([\![U \to V]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha) \to \alpha & (22) \\ ([\![u]\!]\overline{A}\,\overline{a}, [\![u]\!]\overline{A}'\,\overline{a}') &\in ([\![U]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha) \to \alpha & (23) \end{aligned}$$

ここで、帰納法の仮定 (22) を使うために (20) (21) の右辺の第二引数をそれぞれ g, g' とおき $(g, g') \in [\![U \to V]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha$ であることを示す。

二項関係 $\to$ の定義より、任意の $(h, h') \in [\![U \to V]\!]\overline{\mathcal{A}}$ (24) について $(\phi\ g\ h, \phi\ g'\ h') \in \alpha$ を示せばよい。

$$\begin{aligned} \phi\ g\ h &= \phi\ (\psi\ (\lambda f.(\phi^\alpha\ ([\![u]\!]\overline{A}\,\overline{a})\ (\psi\ (\lambda v.\phi^f\ f\ v\ y)))))\ h \\ &\quad (\lambda f.(\phi^\alpha\ ([\![u]\!]\overline{A}\,\overline{a})\ (\psi\ (\lambda v.\phi^f\ f\ v\ y))))\ h \\ &\quad \phi^\alpha\ ([\![u]\!]\overline{A}\,\overline{a})\ (\psi\ (\lambda v.\phi^f\ h\ v\ y)) & (25) \\ \phi\ g'\ h' &= \phi^\alpha\ ([\![u]\!]\overline{A}'\,\overline{a}')\ (\psi\ (\lambda v.\phi^f\ h'\ v\ y')) & (26) \end{aligned}$$

ここで、帰納法の仮定 (23) を使うために (25) (26) の右辺の第二引数をそれぞれ c, c' とおき $(c, c') \in [\![U]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha$ であることを示す。

二項関係 $\to$ の定義より、任意の $(z, z') \in [\![U]\!]\overline{\mathcal{A}}$ (27) について $(\phi\ c\ z, \phi\ c'\ z') \in \alpha$ であることを示せばよい。

$$\begin{aligned} \phi\ c\ z &= \phi\ (\psi\ (\lambda v.\phi^f\ h\ v\ y))\ z \\ &\quad (\lambda v.\phi^f\ h\ v\ y)\ z \\ &\quad \phi^f\ h\ z\ y & (28) \\ \phi\ c'\ z' &= \phi^f\ h'\ z'\ y' & (29) \end{aligned}$$

(24) より $(h, h') \in [\![U \to V]\!]\overline{\mathcal{A}} = [\![U]\!]\overline{\mathcal{A}} \to ([\![V]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha) \to \alpha$ であるから CPS 関数の二項関係の定義と (27) (19) より

$$(\phi^f\ h\ z\ y, \phi^f\ h'\ z'\ y') \in \alpha$$

これと (28) (29) より $(\phi\ c\ z, \phi\ c'\ z') \in \alpha$ である。

よって二項関係 $\to$ の定義を満たすので $(c, c') \in [\![U]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha$ である。これと帰納法の仮定 (23) の CPS の二項関係の定義から $(\phi^\alpha\ ([\![u]\!]\overline{A}\,\overline{a})\ c, \phi^\alpha\ ([\![u]\!]\overline{A}'\,\overline{a}')\ c') \in \alpha$ である。これと (25) (26) より $(\phi\ g\ h, \phi\ g'\ h') \in \alpha$ である。

よって 二項関係 $\to$ の定義を満たすので $(g, g') \in [\![U \to V]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha$ である。これと帰納法の仮定 (22) の CPS の二項関係の定義から $(\phi^\alpha\ ([\![t]\!]\overline{A}\,\overline{a})\ g, \phi^\alpha\ ([\![t]\!]\overline{A}'\,\overline{a}')\ g') \in \alpha$ である。これと (20) (21) より $(\phi^\alpha\ f\ y, \phi^\alpha\ f'\ y') \in \alpha$ である。

よって CPS の二項関係の定義を満たすので $([\![t\ u]\!]\overline{A}\,\overline{a}, [\![t\ u]\!]\overline{A}'\,\overline{a}') \in ([\![V]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha) \to \alpha$ であるから定理は成り立つ。

4. $\overline{X};\overline{x} \vdash \Lambda X.t : \forall X.T$ のとき、

$$\begin{aligned} [\![\Lambda X.t]\!]\overline{A}\,\overline{a} &= \psi^\alpha\ (\lambda k.\phi\ k\ (\Psi\ (\lambda A.[\![t]\!]\overline{A}[A/X]\,\overline{a}))) && (30) \\ [\![\Lambda X.t]\!]\overline{A}'\,\overline{a}' &= \psi^\alpha\ (\lambda k.\phi\ k\ (\Psi\ (\lambda A.[\![t]\!]\overline{A}'[A/X]\,\overline{a}'))) && (31) \end{aligned}$$

これらが二項関係 $([\![\forall X.T]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha) \to \alpha$ に入ることを示す。

$f = (30)$ $f' = (31)$ とおく。CPS の二項関係の定義より、任意の $(y, y') \in [\![\Lambda X.T]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha$ (34) について $(\phi^\alpha\ f\ y, \phi^\alpha\ f'\ y') \in \alpha$ であることを示せばよい。

$$\begin{aligned} \phi^\alpha\ f\ y &= \phi^\alpha\ \psi^\alpha\ (\lambda k.\phi\ k\ (\Psi\ (\lambda A.[\![t]\!]\overline{A}[A/X]\,\overline{a})))\ y \\ & \quad (\lambda k.\phi\ k\ (\Psi\ (\lambda A.[\![t]\!]\overline{A}[A/X]\,\overline{a})))\ y \\ & \quad \phi\ y\ (\Psi\ (\lambda A.[\![t]\!]\overline{A}[A/X]\,\overline{a})) && (32) \\ \phi^\alpha\ f'\ y' &= \phi\ y\ (\Psi\ (\lambda A.[\![t]\!]\overline{A}'[A/X]\,\overline{a}')) && (33) \end{aligned}$$

ここで、(34) の二項関係の定義を使うために、(32) (33) の右辺の第二引数をそれぞれ F, F' とおき $(F, F') \in [\![\Lambda X.T]\!]\overline{\mathcal{A}}$ であることを示す。

$$[\![\forall X.T]\!]\overline{\mathcal{A}} = \forall(\lambda\mathcal{A}.([\![T]\!]\overline{\mathcal{A}}[\mathcal{A}/X] \to \alpha) \to \alpha)$$

であるので、二項関係 $\forall$ の定義より、任意の $\mathcal{B} : B \Leftrightarrow B'$ (35) について

$$\mathcal{F} = \lambda\mathcal{A}.([\![T]\!]\overline{\mathcal{A}}[\mathcal{A}/X] \to \alpha) \to \alpha$$

とおいて $(\Phi\ F\ B, \Phi\ F'\ B') \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$ であることを示せばよい。

$$\begin{aligned} \Phi\ F\ B &= \Phi\ (\Psi\ (\lambda A.[\![t]\!]\overline{A}[A/X]\,\overline{a}))\ B \\ & \quad (\lambda A.[\![t]\!]\overline{A}[A/X]\,\overline{a})\ B \\ & \quad [\![t]\!]\overline{A}[B/X]\,\overline{a} && (36) \\ \Phi\ F'\ B' &= [\![t]\!]\overline{A}[B'/X]\,\overline{a} && (37) \end{aligned}$$

型規則より

$$\frac{\overline{X}, X; \overline{x} \vdash t : T \quad \overline{X} \vdash_{ws} \overline{x}}{\overline{X}; \overline{x} \vdash \Lambda X.t : \forall X.T}\ (\forall\mathtt{I})$$

であるから、帰納法の仮定より $(\overline{X}, X), \overline{x}$ を respect するすべての環境で $t : T$ に対して定理が成り立つ。これを適用するため、環境 $\overline{\mathcal{A}}[\mathcal{B}/X]$, $\overline{A}[B/X]$,$\overline{A}'[B'/X]$, $\overline{a}$, $\overline{a}'$ が $(\overline{X}, X)$, $\overline{x}$ を respect するか調べる。

型規則より $(\overline{X}, X)$ の変数名はすべて異なるので $\overline{X}$ は X を含まない。また $\overline{X} \vdash_{ws} \overline{x}$ であるから $\overline{x}$ は型変数 X を含まない。さらに定理の仮定より、環境 $\overline{\mathcal{A}}$, $\overline{A}$, $\overline{A}'$, $\overline{a}$, $\overline{a}'$ が $\overline{X}$, $\overline{x}$ を respect するから以下が成り立つ。

- $\overline{\mathcal{A}}$ は $\overline{X}$ の relation environment である。すなわち $\overline{\mathcal{A}}[\mathcal{B}/X]$ は $\overline{X}$ の relation environment である。
- $\overline{A}$, $\overline{a}$ が $\overline{X}$, $\overline{x}$ を respect する。すなわち $\overline{A}[B/X]$, $\overline{a}$ が $\overline{X}$, $\overline{x}$ を respect する。
- $\overline{A}'$, $\overline{a}'$ が $\overline{X}$, $\overline{x}$ を respect する。すなわち $\overline{A}'[B'/X]$, $\overline{a}'$ が $\overline{X}$, $\overline{x}$ を respect する。
- $\overline{\mathcal{A}} : \overline{A} \Leftrightarrow \overline{A}'$ である
- すべての $x_i : T_i \in \overline{x}$ について $(\overline{a}(x_i), \overline{a}'(x_i)) \in [\![T_i]\!]\overline{\mathcal{A}}$ である。すなわち、すべての $x_i : T_i \in \overline{x}$ について $(\overline{a}(x_i), \overline{a}'(x_i)) \in [\![T_i]\!]\overline{\mathcal{A}}[\mathcal{B}/X]$ である。

さらに型変数 X について以下が言える。

- $\overline{\mathcal{A}}[\mathcal{B}/X](X) = \mathcal{B}$ であるから $\overline{\mathcal{A}}[\mathcal{B}/X]$ は $(\overline{X}, X)$ の relation environment である。
- $\overline{A}[B/X](X) = B$ であるから $\overline{A}[B/X]$ は $(\overline{X}, X)$ の type environment である。したがって $\overline{A}[B/X]$, $\overline{a}$ が $(\overline{X}, X)$, $\overline{x}$ を respect する。

- $\overline{A}'[B'/X](X) = B'$ であるから $\overline{A}'[B'/X]$ は $(\overline{X}, X)$ の type environment である。したがって $\overline{A}'[B'/X], \overline{a}'$ が $(\overline{X}, X), \overline{x}$ を respect する。
- (35) より $\mathcal{B} : B \Leftrightarrow B'$ であるから $\overline{\mathcal{A}}[\mathcal{B}/X](X) : \overline{A}[B/X](X) \Leftrightarrow \overline{A}'[B'/X](X)$ である。したがって $\overline{\mathcal{A}}[\mathcal{B}/X] : \overline{A}[B/X] \Leftrightarrow \overline{A}'[B'/X]$ である。

よって、環境 $\overline{\mathcal{A}}[\mathcal{B}/X]$, $\overline{A}[B/X]$,$\overline{A}'[B'/X]$, $\overline{a}$, $\overline{a}'$ が $(\overline{X}, X), \overline{x}$ を respect する。帰納法の仮定より $([\![t]\!]\overline{A}[B/X]\,\overline{a}, [\![t]\!]\overline{A}'[B'/X]\,\overline{a}') \in ([\![T]\!]\overline{\mathcal{A}}[\mathcal{B}/X] \to \alpha) \to \alpha$ である。また

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{F}(\mathcal{B}) & = & (\lambda\mathcal{A}.([\![T]\!]\overline{\mathcal{A}}[\mathcal{A}/X] \to \alpha) \to \alpha)\ \mathcal{B} \\ & = & ([\![T]\!]\overline{\mathcal{A}}[\mathcal{B}/X] \to \alpha) \to \alpha\end{array}$$

であるから (36) (37) より $(\Phi\ F\ B, \Phi\ F'\ B') \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$ である。

よって二項関係 $\forall$ の定義を満たすので $(F, F') \in [\![\Lambda X.T]\!]\overline{\mathcal{A}}$ である。これと (34) の二項関係 $\to$ の定義より $(\phi\ y\ F, \phi\ y'\ F') \in \alpha$ である。これと (32) (33) より $(\phi^\alpha\ f\ y, \phi^\alpha\ f'\ y') \in \alpha$ である。

よって CPS の二項関係の定義を満たすので $([\![\Lambda X.t]\!]\overline{A}\,\overline{a}, [\![\Lambda X.t]\!]\overline{A}'\,\overline{a}') \in ([\![\forall X.T]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha) \to \alpha$ であるから定理は成り立つ。

5. $\overline{X}; \overline{x} \vdash t_U : T[U/X]$ のとき、

$$\begin{array}{rcll}[\![t_U]\!]\overline{A}\,\overline{a} & = & \psi^\alpha\ (\lambda k.\phi^\alpha\ ([\![t]\!]\overline{A}\,\overline{a})\ (\psi\ (\lambda g.\phi^\alpha\ (\Phi\ g\ ([\![U]\!]\overline{A}))\ k))) & (38) \\ [\![t_U]\!]\overline{A}'\,\overline{a}' & = & \psi^\alpha\ (\lambda k.\phi^\alpha\ ([\![t]\!]\overline{A}'\,\overline{a}')\ (\psi\ (\lambda g.\phi^\alpha\ (\Phi\ g\ ([\![U]\!]\overline{A}'))\ k))) & (39)\end{array}$$

これらが二項関係 $([\![T[U/X]]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha) \to \alpha$ に入ることを示す。

$f = (38)$ $f' = (39)$ とおく。CPS の二項関係の定義より、任意の $(y, y') \in [\![T[U/X]]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha$ (40) について $(\phi^\alpha\ f\ y, \phi^\alpha\ f'\ y') \in \alpha$ であることを示せばよい。

$$\begin{array}{rcll}\phi^\alpha\ f\ y & = & \phi^\alpha\ (\psi^\alpha\ (\lambda k.\phi^\alpha\ ([\![t]\!]\overline{A}\,\overline{a})\ (\psi\ (\lambda g.\phi^\alpha\ (\Phi\ g\ ([\![U]\!]\overline{A}))\ k))))\ y & \\ & & (\lambda k.\phi^\alpha\ ([\![t]\!]\overline{A}\,\overline{a})\ (\psi\ (\lambda g.\phi^\alpha\ (\Phi\ g\ ([\![U]\!]\overline{A}))\ k)))\ y & \\ & & \phi^\alpha\ ([\![t]\!]\overline{A}\,\overline{a})\ (\psi\ (\lambda g.\phi^\alpha\ (\Phi\ g\ ([\![U]\!]\overline{A}))\ y)) & (41) \\ \phi^\alpha\ f'\ y' & = & \phi^\alpha\ ([\![t]\!]\overline{A}'\,\overline{a}')\ (\psi\ (\lambda g.\phi^\alpha\ (\Phi\ g\ ([\![U]\!]\overline{A}'))\ y')) & (42)\end{array}$$

型規則より

$$\frac{\overline{X}; \overline{x} \vdash t : \forall X.T \quad \overline{X} \vdash_{ws} U}{\overline{X}; \overline{x} \vdash t_U : T[U/X]}\ (\forall\mathtt{E})$$

であるから、帰納法の仮定より $([\![t]\!]\overline{A}\,\overline{a}, [\![t]\!]\overline{A}'\,\overline{a}') \in ([\![\forall X.T]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha) \to \alpha$ である。ここで、帰納法の仮定を使うために (41) (42) の第二引数をそれぞれ F, F' とおいて $(F, F') \in [\![\forall X.T]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha$ であることを示す。

二項関係 $\to$ の定義より、任意の $(G, G') \in [\![\forall X.T]\!]\overline{\mathcal{A}}$ (43) について $(\phi\ F\ G, \phi\ F'\ G') \in \alpha$ であることを示せばよい。

$$\begin{array}{rcll}\phi\ F\ G & = & \phi\ (\psi\ (\lambda g.\phi^\alpha\ (\Phi\ g\ ([\![U]\!]\overline{A}))\ y))\ G & \\ & & (\lambda g.\phi^\alpha\ (\Phi\ g\ ([\![U]\!]\overline{A}))\ y)\ G & \\ & & \phi^\alpha\ (\Phi\ G\ ([\![U]\!]\overline{A}))\ y & (44) \\ \phi\ F'\ G' & = & \phi^\alpha\ (\Phi\ G'\ ([\![U]\!]\overline{A}'))\ y' & (45) \\ [\![\forall X.T]\!]\overline{\mathcal{A}} & = & \forall(\lambda\mathcal{A}.([\![T]\!]\overline{\mathcal{A}}[\mathcal{A}/X] \to \alpha) \to \alpha) & \end{array}$$

$\mathcal{F} = \lambda\mathcal{A}.([\![T]\!]\overline{\mathcal{A}}[\mathcal{A}/X] \to \alpha) \to \alpha$ とおく。定理の仮定より、環境 $\overline{\mathcal{A}}$, $\overline{A}$, $\overline{A}'$ は $\overline{\mathcal{A}} : \overline{A} \Leftrightarrow \overline{A}'$ であるような relation environment と type environment である。また、型規則より $\overline{X} \vdash_{ws} U$ であるから補題 3.8 より $[\![U]\!]\overline{\mathcal{A}} : [\![U]\!]\overline{A} \Leftrightarrow [\![U]\!]\overline{A}'$ が存在する。これと (43) の $\forall$ の二項関係の定義より

$$(\Phi\ G\ ([\![U]\!]\overline{A}), \Phi\ G'\ ([\![U]\!]\overline{A}')) \in \mathcal{F}([\![U]\!]\overline{\mathcal{A}}) = ([\![T]\!]\overline{\mathcal{A}}[[\![U]\!]\overline{\mathcal{A}}/X] \to \alpha) \to \alpha \qquad (46)$$

(40) と補題 3.9 より

$$(y, y') \in [\![T[U/X]]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha = [\![T]\!]\overline{\mathcal{A}}[[\![U]\!]\overline{\mathcal{A}}/X] \to \alpha$$

これと (46) の CPS の二項関係の定義より

$$(\phi^\alpha\ (\Phi\ G\ ([\![U]\!]\overline{A}))\ y, \phi^\alpha\ (\Phi\ G'\ ([\![U]\!]\overline{A}'))\ y') \in \alpha$$

これと (44) (45) より $(\phi\ F\ G, \phi\ F'\ G') \in \alpha$ である。

よって、二項関係 $\to$ の定義を満たすので $(F, F') \in [\![\forall X.T]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha$ である。これと帰納法の仮定の CPS の二項関係の定義より $(\phi^\alpha\ ([\![t]\!]\overline{A}\,\overline{a})\ F, \phi^\alpha\ ([\![t]\!]\overline{A}'\,\overline{a}')F'\ ) \in \alpha$ である。これと (41) (42) より $(\phi^\alpha\ f\ y, \phi^\alpha\ f'\ y') \in \alpha$ である。

よって CPS の二項関係の定義を満たすので $(f, f') \in ([\![T[U/X]]\!]\overline{\mathcal{A}} \to \alpha) \to \alpha$ であるから定理は成り立つ。 □

4 Call-by-Value CPS のパラメトリシティを用いた例

3 節で証明した call-by-value CPS のパラメトリシティについて、簡単な例を考える。Polymorphic Lambda Calculus で $\forall X.(X \to (X \to X))$ 型を持つ二つの項 $\Lambda X.\lambda x : X.\lambda y : X.x$, $\Lambda X.\lambda x : X.\lambda y : X.y$ の call-by-value CPS の意味を考える。以降、項について X の記述を省略する。

$$\begin{array}{rcl}
[\![\lambda x.\lambda y.x]\!]\overline{A}\,\overline{a} & = & \psi^\alpha\ \lambda k.\phi\ k\ (\psi^f\ (\lambda a.\lambda k'.\phi\ k'\ (\psi^f\ (\lambda b.\lambda k''.\phi\ k''\ a)))) \\
[\![\lambda x.\lambda y.y]\!]\overline{A}\,\overline{a} & = & \psi^\alpha\ \lambda k.\phi\ k\ (\psi^f\ (\lambda a.\lambda k'.\phi\ k'\ (\psi^f\ (\lambda b.\lambda k''.\phi\ k''\ b))))
\end{array}$$

各行の右辺について、最終的に継続 k'' に渡る値が前者は第一引数 a, 後者は第二引数 b であるので、異なる値であることがわかる。またパラメトリシティ (定理 3.10) によれば、$([\![\lambda x.\lambda y.x]\!]\overline{A}\,\overline{a}, [\![\lambda x.\lambda y.x]\!]\overline{A}'\,\overline{a}')$ や $([\![\lambda x.\lambda y.y]\!]\overline{A}\,\overline{a}, [\![\lambda x.\lambda y.y]\!]\overline{A}'\,\overline{a}')$ が frame 上の二項関係 $[\![\forall X.(X \to (X \to X))]\!]\overline{\mathcal{A}}$ に含まれることがわかるが、$([\![\lambda x.\lambda y.x]\!]\overline{A}\,\overline{a}, [\![\lambda x.\lambda y.y]\!]\overline{A}'\,\overline{a}')$ については必ずしもそうではなく、二項関係のより具体的な定義による。よって本研究のパラメトリシティは、必要以上に強い体系ではないと考えられる。

本研究で扱っている体系では、call-by-name と call-by-value の評価戦略の違いによって異なる結果が得られる項を作ることはできない。しかしながら、無限ループや abort 命令など値の決定できない項を扱う体系に拡張した際にどのような違いが見られるかを、call-by-value CPS のパラメトリシティ（定理 3.10）の証明から推察することはできる。

パラメトリシティを使って得られる定理の例として、最も簡単な

$$id = \Lambda X.(\lambda x : X.x) : \forall X.X \to X$$

を考える。Wadler の call-by-name のパラメトリシティからは、二項関係 $\mathcal{X} : X \Leftrightarrow X'$ を $\mathcal{X} \in [X \to X']$ である数学的な関数と解釈することで

「任意の $X \to X'$ という関数 $\mathcal{X}$ について $\mathcal{X} \circ id_X = id_{X'} \circ \mathcal{X}$」

という結果が得られる。これが call-by-value の場合、定義を展開すると以下のようになる。

$$\begin{array}{rcl}
[\![\forall X.X \to X]\!]\overline{\mathcal{A}} & = & \forall(\lambda\mathcal{X}.([\![X \to X]\!]\overline{\mathcal{A}}[\mathcal{X}/X] \to \alpha) \to \alpha) \\
& = & \forall(\lambda\mathcal{X}.(([\![X]\!]\overline{\mathcal{A}}[\mathcal{X}/X] \to ([\![X]\!]\overline{\mathcal{A}}[\mathcal{X}/X] \to \alpha) \to \alpha) \to \alpha) \to \alpha) \\
& = & \forall(\lambda\mathcal{X}.((\mathcal{X} \to (\mathcal{X} \to \alpha) \to \alpha) \to \alpha) \to \alpha)
\end{array}$$

従って、パラメトリシティの結果から、$([\![id]\!]\overline{A}\,\overline{a}, [\![id]\!]\overline{A}\,\overline{a}) \in \forall(\lambda\mathcal{X}.((\mathcal{X} \to (\mathcal{X} \to \alpha) \to \alpha) \to \alpha) \to \alpha)$ が言える。これを上の例と同様に、二項関係 $\mathcal{X} : X \Leftrightarrow X'$, $\alpha : \beta \Leftrightarrow \beta'$ を $\mathcal{X} \in [X \to X']$, $\alpha \in [\beta \to \beta']$ である数学的な関数と解釈して言い換えると以下のようになる。

for all $\mathcal{X} \in [X \to X']$ と for all $\alpha \in [\beta \to \beta']$ について
for all (k, k') such that $\alpha\ (k\ f) = k'\ f'$
for all (f, f') such that
for all (a, a') such that $\mathcal{X}\ a = a'$ と
for all (h, h') such that $\alpha\ (h\ b) = h'\ b'$ for all (b, b') such that $\mathcal{X}\ b = b'$ について
$\alpha\ (f\ a\ h) = f'\ a'\ h'$
について $\alpha\ (k\ id_X) = k'\ id_{X'}$

つまり、ここで得られている free theorem は、もとの直接形式の恒等関数に対する定理ではなく、その CPS 版に対する定理となっている。これは、我々が考えている式の意味が CPS になっているためである。

- id_X と $id_{X'}$ は、以下の条件を満たすコンテキスト k, k' のもとで関係づいている。
- k, k' の条件：以下の条件を満たす関係づいた f, f' を渡したら、その結果も関係づいている。
- f, f' の条件：任意の $\mathcal{X}$ で関係づいている b, b' と、任意の $\mathcal{X} \to \alpha$ で関係づいている h, h' のもとでは、$f\ b\ h$ と $f'\ b'\ h'$ も関係づいている。

このように、ここで得られた free theorem はコンテキスト情報も含めた定理となっていることがわかる。これは、限定継続命令のパラメトリシティなどにつながっていく可能性があると考えている。

参考文献

[1] Jean-Philippe Bernardy, Patrik Jansson, and Ross Paterson. Parametricity and dependent types. In *Proceedings of the 15th ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming*, ICFP '10, pp. 345–356, New York, NY, USA, 2010. ACM.

[2] Małgorzata Biernacka, Dariusz Biernacki, Sergueï Lenglet, and Marek Materzok. Proving termination of evaluation for system F with control operators. In Ugo de'Liguoro and Alexis Saurin, editors, Proceedings First Workshop on *Control Operators and their Semantics,* Eindhoven, The Netherlands, June 24-25, 2013 , Vol. 127 of *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, pp. 15–29. Open Publishing Association, 2013.

[3] Andrew M. Pitts. Parametric polymorphism and operational equivalence. *Mathematical. Structures in Comp. Sci.*, Vol. 10, No. 3, pp. 321–359, June 2000.

[4] John C. Reynolds. Types, abstraction and parametric polymorphism. In *IFIP Congress*, pp. 513–523, 1983.

[5] Daniel Seidel and Janis Voigtländer. Refined typing to localize the impact of forced strictness on free theorems. *Acta Informatica*, Vol. 48, No. 3, pp. 191–211, 2011.

[6] Philip Wadler. Theorems for free! In *Proceedings of the Fourth International Conference on Functional Programming Languages and Computer Architecture*, FPCA '89, pp. 347–359, New York, NY, USA, 1989. ACM.