Semantics with Applications

(2章3節)

2.3 等価の結果

- While言語の意味論2つ (自然意味論と構造的操作的意味論) が等価であることを証明する

定理 2.26

Whileの全ての命令文で

$$\mathcal{S}_{\mathbf{ns}}[\![\mathrm{S}]\!] = \mathcal{S}_{\mathbf{sos}}[\![\mathrm{S}]\!]$$

である。

この結果は2つの性質を表している

- もしある状態からのSの実行がどちらかの意味論で終了するなら、それはもう一方でも終了し、結果の状態は等しくなる

- もしある状態からのSの実行がどちらかの意味論でループするなら、それはもう一方でもループする。

(定理2.26を証明するための補助定理)

補助定理2.27

Whileの全ての命令文Sと状態sとs’で

$\langle S,\ s\rangle \to s'$ ならば $\langle S,\ s\rangle \Rightarrow^* s'$

もしsからのSの実行が自然意味論で終了するなら、
構造的操作的意味論でも同じ状態で終了するだろう。

次ページから証明→

補題2.27の証明

＊証明：証明は＜S, s＞→S'のための導出木の形における帰納法

（つまり[ass(ns)],[skip(ns)],....のこと）によって始める

補題2.27の証明 (1/3)

$*$ $[\mathrm{ass}_{\mathrm{ns}}]$ の場合：

$\langle x := a,\ s\rangle \to s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]$ を仮定する。

$[\mathrm{ass}_{\mathrm{sos}}]$ より $\langle x := a,\ s\rangle \Rightarrow s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]$ が得られる。

$*$ $[\mathrm{skip}_{\mathrm{ns}}]$ の場合：上に類似。

$*$ $[\mathrm{comp}_{\mathrm{ns}}]$ の場合：

$\langle S_1,\ s\rangle \to s'$、$\langle S_2,\ s'\rangle \to s''$故に $\langle S_1; S_2,\ s\rangle \to s''$を仮定できる。

帰納法の仮定は $\langle S_1,\ s\rangle \to s'$ と $\langle S_2,\ s'\rangle \to s''$の両方の仮定に適用でき、それから $\langle S_1,\ s\rangle \Rightarrow^* s'$ と $\langle S_2,\ s'\rangle \Rightarrow^* s''$が得られる。演習 2.21 より $\langle S_1; S_2,\ s\rangle \Rightarrow^* \langle S_2,\ s'\rangle$ なのでそれにより $\langle S_1; S_2,\ s\rangle \Rightarrow^* s''$が得られる。

補題2.27の証明 (2/3)

$*$ $[\mathrm{if}^{\mathrm{tt}}_{\mathrm{ns}}]$ の場合：

$\mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$、$\langle S_1,\ s\rangle \to s'$故に $\langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2,\ s\rangle \to s'$を仮定できる。$\mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$ なので $\langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2,\ s\rangle \Rightarrow \langle S_1,\ s\rangle \Rightarrow^* s'$が得られる。はじめの $\Rightarrow$ は $[\mathrm{if}^{\mathrm{tt}}_{\mathrm{sos}}]$ から、二つ目の $\Rightarrow$ は $\langle S_1,\ s\rangle \to s'$に帰納法の仮定を用いることによる。

$*$ $[\mathrm{if}^{\mathrm{ff}}_{\mathrm{ns}}]$ の場合：

上 $[\mathrm{if}^{\mathrm{tt}}_{\mathrm{ns}}]$ に類似。

補題2.27の証明 (3/3)

＊ $[\mathrm{while}^{\mathrm{tt}}_{\mathrm{ns}}]$ の場合：

$\mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$、$\langle S,\ s\rangle \to s'$、$\langle \mathtt{while}\ b\ \mathtt{do}\ S\ ,\ s'\rangle \to s''$故に、$\langle \mathtt{while}\ b\ \mathtt{do}\ S\ ,\ s\rangle \to s''$を仮定する。帰納法の仮定は、$\langle S,\ s\rangle \to s'$と $\langle \mathtt{while}\ b\ \mathtt{do}\ S\ ,\ s'\rangle \to s''$の両方の仮定に適用でき、$\langle S,\ s\rangle \Rightarrow^* s'$と $\langle \mathtt{while}\ b\ \mathtt{do}\ S\ ,\ s'\rangle \Rightarrow^* s''$が得られる。

演習 2.21 で $\langle S; \mathtt{while}\ b\ \mathtt{do}\ S\ ,\ s'\rangle \Rightarrow^* s''$を得ている。

$[\mathrm{while}_{\mathrm{sos}}]$ と $[\mathrm{if}^{\mathrm{tt}}_{\mathrm{sos}}](\mathcal{B}[\![b]\!]s = tt)$ を使って、下の結果が得られる。

$\langle \mathtt{while}\ b\ \mathtt{do}\ S\ ,\ s\rangle$

$\Rightarrow \langle \mathtt{if}\ b\ \mathtt{then}\ (S; \mathtt{while}\ b\ \mathtt{do}\ S\ )\ \mathtt{else\ skip},\ \mathtt{s}\rangle$

$\Rightarrow \langle \mathrm{S};\ \ \mathtt{while\ b\ do\ S}\ ,\ \mathtt{s}\rangle$

$\Rightarrow^* \mathtt{s}''$

よって補助定理 2.27 は証明された。

(定理2.26を証明するための補助定理2)

補助定理2.28

Whileの全ての命令文Sと状態sとs’,自然数kで

$$\langle \mathrm{S},\ \mathrm{s}\rangle \Rightarrow^{\mathrm{k}} \mathrm{s}' \quad \text{ならば} \quad \langle \mathrm{S},\ \mathrm{s}\rangle \rightarrow \mathrm{s}'$$

もしsからのSの実行が構造的操作的意味論で終了するなら、自然意味論でも同じ状態で終了するだろう。

（つまり補助定理2.27の逆）

次ページから証明→

補題2.28の証明 (1/3)

* $[\mathrm{ass}_{\mathrm{sos}}]$ の場合：簡単（$k_0 = 0$）
* $[\mathrm{skip}_{\mathrm{sos}}]$ の場合：簡単（$k_0 = 0$）

* $[\mathrm{comp}^1_{\mathrm{sos}}]$ と $[\mathrm{comp}^2_{\mathrm{sos}}]$ の場合：

どちらの場合も $\langle S_1; S_2,\ s\rangle \Rightarrow^{k_0+1} s''$を仮定する。
補助定理 2.19 が適用でき、$\langle S_1,\ s\rangle \Rightarrow^{k_1} s'$と $\langle S_2,\ s'\rangle \Rightarrow^{k_2} s''$となる状態 s' と $k_1 + k_2 = k_0 + 1$ となる自然数 k_1と k_2が存在することが分かる。
今、$k_1 \leq k_0$、$k_2 \leq k_0$より、帰納法の仮定をこれらの導出列のそれぞれに適用できる。
よって $\langle S_1,\ s\rangle \to s'$と $\langle S_2,\ s'\rangle \to s''$が得られた。
$[\mathrm{comp}_{\mathrm{ns}}]$ を使って、$\langle S_1; S_2,\ s\rangle \to s''$を得られる。

補題2.28の証明 (2/3)

＊ $[\mathrm{if}^{\mathrm{tt}}_{\mathrm{sos}}]$ の場合：

$\mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$ と $\langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2,\ s\rangle \Rightarrow \langle S_1,\ s\rangle \Rightarrow^{k_0} s'$を仮定する。

帰納法の仮定を導出列 $\langle S_1,\ s\rangle \Rightarrow^{k_0} s'$に適用でき、$\langle S_1,\ s\rangle \to s'$が得られる。

よって結果は $[\mathrm{if}^{\mathrm{tt}}_{\mathrm{ns}}]$ を使うことで得られる。

＊ $[\mathrm{if}^{\mathrm{ff}}_{\mathrm{sos}}]$ の場合：類似である。

補題2.28の証明 (3/3)

* $[\mathrm{while}_{\mathrm{sos}}]$ の場合：

$\langle \mathtt{while}\ b\ \mathtt{do}\ S\ ,\ s\rangle$

$\Rightarrow \langle \mathtt{if}\ b\ \mathtt{then}\ S; \mathtt{while}\ b\ \mathtt{do}\ S\ \ \mathtt{else\ skip},\ \mathtt{s}\rangle$

$\Rightarrow^{\mathrm{k}_0} \mathtt{s}''$

が成り立つ。

帰納法の仮定が、導出列の最後のステップの k_0 に適用でき、

よって $\langle \mathtt{if\ b\ then}\ (\mathtt{S}; \mathtt{while\ b\ do\ S}\ )\ \mathtt{else\ skip},\ \mathtt{s}\rangle \rightarrow \mathtt{s}''$ が得られる。

そして補助定理 2.5 より $\langle \mathtt{while\ b\ do\ S}\ ,\ \mathtt{s}\rangle \rightarrow \mathtt{s}''$ が得られる。

よって補助定理 2.28 は証明された。

定理2.26の証明:

任意の命令文Sと状態sで、補助定理2.27と2.28より

$$\mathcal{S}_{\mathrm{ns}}[\![\mathrm{S}]\!] = \mathrm{s}' \rightharpoonup \mathcal{S}_{\mathrm{sos}}[\![\mathrm{S}]\!] = \mathrm{s}'$$

$$\mathcal{S}_{\mathrm{sos}}[\![\mathrm{S}]\!] = \mathrm{s}' \rightharpoonup [\![\mathrm{S}]\!]\mathcal{S}_{\mathrm{ns}}[\![\mathrm{S}]\!] = \mathrm{s}' \ (\mathtt{vice\ versa})$$

が導かれる。

よって

$$\mathcal{S}_{\mathrm{ns}}[\![\mathrm{S}]\!] = \mathcal{S}_{\mathrm{sos}}[\![\mathrm{S}]\!]$$

が言える。

演習2.29

Whileの言語を命令文 repeat S until b で拡張しなさい。

その構造の自然意味論は演習2.7で、構造的操作的意味論は演習2.17で考えた。拡張された言語にも定理2.26が成り立つように証明を修正しなさい。

演習2.30

Whileの言語を命令文 for x := a1 to a2 do S で拡張しなさい。

その構造の自然意味論は演習2.8で、構造的操作的意味論は演習2.18で考えた。拡張された言語にも定理2.26が成り立つように証明を修正しなさい。

- 定理2.26を証明するのに使った証明のtechnique

1.導出木の形の帰納法による証明により、自然意味論のそれぞれの導出木に一致する操作的意味論の有限の導出列があることを示した

2.導出列の長さの帰納法により証明し、構造的操作的意味論の有限な導出列それをれに対して、一致する自然意味論の導出木があることを示した